経済時系列の構造変化に関する一考察

杉　原　左　右　一

Ⅰ　はじめに

経済時系列の構造変化を統計的に推定する事は、実証的分析に携わる際の重要問題であるにも拘わらず、その推定方法は未だ十分に明らかにされていない様に思われる。本稿では、経済時系列の構造変化に関して、次に述べる様な２、３のモデルをとりあげて考察したい。

即ち、先ずⅡで、経済時系列分析に於て基本的な役割を果たす自己回帰型時系列をとりあげ、その自己回帰母数、又は攪乱項の分散が期間毎に変化する場合について、その変化時点と母数の推定方法を明らかにする。

ところで、通常の回帰分析に於ては、この様な母数変化と共に、構造変化を示す変数としてしばしばダミー変数が使用されるのであるが、Ⅲでは、攪乱項が乗法的過程に従う様な動的線型モデルを構築した上で、その外生変数に特にダミー変数を使用する事により、時系列のある種のレベル変化を表現する。又、このモデルを商業販売額指数の分析に適用したい。

最後にⅣでは、Ⅱ、Ⅲのモデルとは異なり、伝統的に経済時系列の分析にしばしば使用される３変動要素モデルをとりあげ、特に傾向変動、季節変動に確率的構造を導入し、従来のモデルを拡張した上で、各変動要素並びに母数の推定について考察したい。

Ⅱ　自己回帰型時系列に於ける構造変化

本節では、経済時系列分析に於て基本的な役割を果たす自己回帰型時系列をとりあげ、その自己回帰母数、又は攪乱項の分散が、全期間Tを通して一定ではなく、ある期間毎に変化する場合に、その変化が生起する時点、並びにその

母数の統計的推定方法について考察したい。なお、以後の解析の簡単化のために、ここでは一次の自己回帰型時系列を考える事にするが、以後の議論は高次の自己回帰型時系列への拡張も可能である。

以下、一般に Z_t を時間 t に依存する変数とするとき、B は、$B^jZ_t=Z_{t-j}(j=0,1,2,\cdots)$ なるラグ演算子であり、$\phi(B)=1-\phi B$ として、$\phi(\omega)=0$ の根は単位円外にあるものと仮定する。

§1. 自己回帰母数が期間毎に変化する場合

先ず、攪乱項の分散は全期間 T を通して一定であるが、自己回帰母数が期間毎に変化する場合に、その変化時点、並びにそれらの母数を如何に推定するかを考えよう。

最初に、一般的な場合を考える前に、相続く2期間に関して、それらの自己回帰母数の間に変化があるか否かをどの様にして検証するかについて考えてみたい。そのために、ある時点 $s+1$ から始まる、長さが T_1, T_2 の相続く2期間、$T^{(1)}=\{s+1, s+2, \cdots, s+T_1\}$, $T^{(2)}=\{s+T_1+1, s+T_1+2, \cdots, s+T_1+T_2\}$ に関して、それぞれの確率的構造を(1)、(2)式で表わす。

$$(1)\quad \phi_1(B)y_t=u_t \qquad t\in T^{(1)}$$
$$(2)\quad \phi_2(B)y_t=u_t \qquad t\in T^{(2)} \qquad\qquad u_t\sim N.I.D.(0, \sigma^2)$$

但し、$\phi_1(B)=1-\phi_1B$, $\phi_2(B)=1-\phi_2B$ である。

問題は、両期間の自己回帰母数 ϕ_1, ϕ_2 の相等性を検定する事である。

そこで、帰無仮説 H_0, 対立仮説 H_1 を、

$$(3)\quad \begin{aligned} &H_0:\ \phi_1=\phi_2 \\ &H_1:\ \phi_1\neq\phi_2 \end{aligned}$$

とすれば、H_0 の下での最小2乗残差、及び H_1 の下での最小2乗残差を次元 $(T_1+T_2)\times1$ のベクトル $\tilde{u}$, $\tilde{\tilde{u}}$ で表わすとき、統計量 F、

$$(4)\quad F=\frac{\tilde{u}'\tilde{u}-\tilde{\tilde{u}}'\tilde{\tilde{u}}}{\dfrac{\tilde{\tilde{u}}'\tilde{\tilde{u}}}{T_1+T_2-2}}$$

は自由度 $(1,\ T_1+T_2-2)$ の F 分布に従う。従って自己回帰母数 $\phi_1,\ \phi_2$ の相等性は、これを統計量 F に基づく F 検定により検証出来る事がわかる。

一般に、全期間 T の間の変化時点を調べるためには、例えば $T_1=T_2$ とし、$s=0$ から $T-2T_1$ まで、両期間を適当な間隔で順次移動させながら F 値の異常な時点を調べれば良いであろう。

さて、上記の方法か、又は何らかの外的条件により、全期間の変化時点の候補時点として、$t_1, t_2, \cdots, t_m$ $(0=t_0<t_1<\cdots<t_m<t_{m+1}=T)$ があげられているものとしよう。このとき、各期間に関する確率的構造は次式(5)で表わされる。

$$(5)\quad \phi_i(B)y_t=u_t \qquad u_t\sim N.I.D.(0,\sigma^2) \qquad \begin{array}{l} t=t_{i-1}+1,\cdots,t_i \\ i=1,2,\cdots,m+1 \end{array}$$

但し、$\phi_i(B)=1-\phi_iB\ (i=1,2,\cdots,m+1)$ である。

問題は、変化時点のより正確な推定、並びに自己回帰母数 $\phi_i\ (i=1,2,\cdots,m+1)$、及び撹乱項の分散 σ^2 を推定する事である。

そこで尤度関数 L を求めれば、

$$(6)\quad L=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{T}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{t=t_{i-1}+1}^{t_i}(y_t-\phi_iy_{t-1})^2\right\}$$

となる。

従って最尤推定量 $\hat{\phi}_i(i=1,2,\cdots,m+1)$、$\hat{\sigma}^2$ は、$t_1,t_2,\cdots,t_m$ が与えられるとき、

$$(7)\quad \hat{\phi}_i=\frac{\sum_{t=t_{i-1}+1}^{t_i} y_ty_{t-1}}{\sum_{t=t_{i-1}+1}^{t_i} y^2_{t-1}} \qquad i=1,2,\cdots,m+1$$

$$(8)\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{t=t_{i-1}+1}^{t_i}(y_t-\hat{\phi}_iy_{t-1})^2$$

により求める事が出来る。

又、変化時点に関する尤度関数 l は、

$$(9)\quad l=(2\pi\hat{\sigma}^2)^{-\frac{T}{2}}e^{-\frac{T}{2}}$$

である。

従って、あらかじめ候補時点として求めた $t_1, t_2, \cdots, t_m$ の近傍でこれらの値を変化させ、(9)式を最大にする時点と、それに対応する(7), (8)式の値を求める事により、所望の変化時点、並びに $\phi_i (i=1, 2, \cdots, m+1)$, σ^2 の最尤推定値を求める事が出来るであろう。

§2. 攪乱項の分散が期間毎に変化する場合

次に、§1. とは逆に、自己回帰母数は全期間を通して一定であるが、攪乱項の分散が期間毎に変化する場合に、その変化時点、並びにそれらの母数を推定する事を考えよう。

変化時点と考えられる候補時点を $t_1, t_2, \cdots, t_m$ $(0=t_0<t_1<\cdots<t_m<t_{m+1}=T)$ とする。このとき、各期間に関する確率的構造は次式(10)で表わされる。

$$(10)\quad \begin{array}{lll} \phi(B) y_t = u_t & u_t \sim N.I.D.(0, \sigma_t^2) & \\ \sigma_t^2 = \sigma_{(i)}^2 & t = t_{i-1}+1, \cdots, t_i \quad i=1, 2, \cdots, m+1 & \sigma_0^2 = \sigma_{(0)}^2 \end{array}$$

この場合の尤度関数 L は、

$$(11)\quad L = (2\pi)^{-\frac{T}{2}} \prod_{i=1}^{m+1} \left[(\sigma_{(i)}^2)^{-\frac{t_i - t_{i-1}}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_{(i)}^2} \sum_{t=t_{i-1}+1}^{t_i} (y_t - \phi y_{t-1})^2 \right\} \right]$$

となる。

従って最尤推定量 $\hat{\phi}$, $\hat{\sigma}_{(i)}^2$ $(i=1, 2, \cdots, m+1)$ は、$t_1, t_2, \cdots, t_m$ が与えられるとき、次式を満たす。

$$(12)\quad \hat{\phi} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \left(\frac{y_t}{\hat{\sigma}_t} \right) \left(\frac{y_{t-1}}{\hat{\sigma}_{t-1}} \right)}{\sum_{t=1}^{T} \left(\frac{y_{t-1}}{\hat{\sigma}_{t-1}} \right)^2}$$

$$(13)\quad \hat{\sigma}_{(i)}^2 = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \sum_{t=t_{i-1}+1}^{t_i} (y_t - \hat{\phi} y_{t-1})^2 \qquad i=1, 2, \cdots, m+1$$

又、変化時点に関する尤度関数 l は、

$$(14)\quad l = (2\pi e)^{-\frac{T}{2}} \prod_{i=1}^{m+1} (\hat{\sigma}_{(i)}^2)^{-\frac{t_i - t_{i-1}}{2}}$$

である。

従ってこの場合には、変化時点、並びに $\phi, \sigma_{(i)}^2$ $(i=1, 2, \cdots, m+1)$ の最尤推定値を次の様な反復サイクル(1)〜(3)によって推定すれば良いであろう。

(1) $|\hat{\phi}|<1$ を満たす適当な初期値 $\hat{\phi}$ を用い、与えられた時点 $t_i(i=1, 2, \cdots, m)$ の近傍でこれらの値を変化させる事により、(14)式を最大にする $\hat{t}_i(i=1, 2, \cdots, m)$ と $\hat{\sigma}_{(i)}^2(i=1, 2, \cdots, m+1)$ を求める。

(2) (1)で求めた $\hat{t}_i(i=1, 2, \cdots, m)$ と、$\hat{\sigma}_{(i)}^2(i=1, 2, \cdots, m+1)$ をもとにして、(12)式より $\hat{\phi}$ を求める。

(3) 収束するまで上記(1)、(2)を繰り返す。

以上、本節では自己回帰型時系列をとりあげ、その自己回帰母数又は攪乱項の分散が期間毎に変化する場合について、その変化時点と母数の推定方法を明らかにした。より一般的な自己回帰・移動平均型時系列に関する構造変化の推定方法の開発は、今後に残された問題であろう。

Ⅲ 動的線型モデルとレベル変化

筆者は先に、拙稿〔3, 4〕に於て、攪乱項が次数 (p, q) の自己回帰・移動平均型時系列に従う様な動的線型モデルを構築し、その母数推定並びに推定量の統計的性質を明らかにした。本節では、攪乱項が非定常ではあるが、これに適当な型の階差を施す事により、次数 (p, q) の自己回帰・移動平均型時系列となる様な動的線型モデルを考え、特に幾つかの外生変数にかわってダミー変数を導入する事により、時系列のある種のレベル変化を表現したい。

§1. 動的線型モデル

先ずモデルの概要を明らかにしよう。

拙稿〔3, 4〕と同様に、t 期における内生変数、r 種類の外生変数及び攪乱項をそれぞれ $y_t, x_{t,i}$ $(i=1, 2, \cdots, r), e_t$ で表わし、攪乱項 e_t が、(16)式で表わされる次数 $(p, d, q)\times(P, D, Q)_s$ の乗法的過程に従う様な動的線型モデル(15), (16)式を考える。

(15) $$\frac{\xi(B)}{\eta(B)}y_t=\sum_{i=1}^{r}\frac{\alpha_i(B)}{\lambda_i(B)}x_{t,i}+e_t$$

(16) $$\phi(B)\Phi(B^s)(1-B)^d(1-B^s)^D e_t=\theta(B)\Theta(B^s)u_t \quad u_t\sim I.I.D.(0,\sigma^2)$$

ここで、$\xi(B)$, $\eta(B)$, $\alpha_i(B)$, $\lambda_i(B)$ $(i=1,2,\cdots,r)$, $\phi(B)$, $\Phi(B^s)$, $\theta(B)$, $\Theta(B^s)$ はそれぞれ次の様なBに関する多項式である。

(17)
$$\begin{aligned}
&\xi(B)=1-\sum_{j=1}^{n}\xi_j B^j, && \eta(B)=1-\sum_{j=1}^{m}\eta_j B^j \\
&\alpha_i(B)=\alpha_{0i}-\sum_{j=1}^{li}\alpha_{ji}B^j, && \lambda_i(B)=1-\sum_{j=1}^{ki}\lambda_{ji}B^j \qquad (i=1,2,\cdots,r) \\
&\phi(B)=1-\sum_{j=1}^{p}\phi_j B^j, && \Phi(B^s)=1-\sum_{j=1}^{P}\Phi_j B^{js} \\
&\theta(B)=1-\sum_{j=1}^{q}\theta_j B^j, && \Theta(B^s)=1-\sum_{j=1}^{Q}\Theta_j B^{js}
\end{aligned}$$

簡単化のために、(17)式の各多項式に含まれる未知母数をベクトル ξ, η, α_i, λ_i $(i=1,2,\cdots,r)$, ϕ, Φ, θ, Θ で表わし、σ^2 をも含めたすべての未知母数をベクトル $\nu=(\xi,\eta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,\phi,\Phi,\theta,\Theta,\sigma^2)$ で表わす。

解析の必要上、多項式 $\xi(\omega)=0$, $\eta(\omega)=0$, $\alpha_i(\omega)=0$ $(i=1,2,\cdots,r)$, $\phi(\omega)=0$, $\Phi(\omega^s)=0$, $\theta(\omega)=0$, $\Theta(\omega^s)=0$ の根は単位円外にあり、$\lambda_i(\omega)=0$ $(i=1,2,\cdots,r)$ の根は単位円上又は単位円外にある事を仮定し、外生変数 $x_{t,i}(i=1,2,\cdots,r)$ 及び u_t ついては拙稿〔3, 4〕の仮定をここでも設定するものとする。

(16)式で表わされる様なモデルの特徴は、原時系列が非定常であったとしても、これに適当な次数 d, D の階差 $(1-B)^d(1-B^s)^D$ を施す事により、定常な時系列に変換する事ができ、特にこのモデルにより周期 s の周期変動を含む時系列の分析が可能となる点にある。本稿でも§3.に於て、商業販売額指数に関する事例研究のためにこのモデルを適用する事にする。

なお、上記動的線型モデル及びその仮定の持つ意味、並びに母数推定量の統計的性質については、拙稿〔3, 4〕と全く同様にこれを導出する事が出来るため、これらの詳細については拙稿〔3, 4〕にゆずる事にしたい。

§2. ダミー変数とレベル変化

ダミー変数は、種々の構造変化を示す変数として通常の回帰モデルにしばしば使用されるのであるが、ここではこれを上述した動的線型モデルに導入し、特に幾つかの外生変数にかわってダミー変数を用いる事により、時系列のある種のレベル変化を表現したい。

即ち、ダミー変数として、(18)式で表わされる様なステップ関数 $S_t(\tau)$、及びパルス関数 $P_t(\tau)$ を考え、特に幾つかの外生変数 $x_{t,i}$ $(i=1, 2, \cdots, h\leqq r)$ が、

$$x_{t,i}=S_t(\tau_i) \qquad \text{又は} \qquad x_{t,i}=P_t(\tau_i) \qquad (i=1, 2, \cdots, h\leqq r)$$

である場合を考える事にする。

$$(18) \quad S_t(\tau)=\begin{cases} 1 & t\geqq\tau \\ 0 & t<\tau \end{cases}, \qquad P_t(\tau)=\begin{cases} 1 & t=\tau \\ 0 & t\neq\tau \end{cases}$$

ステップ関数 $S_t(\tau)$ とパルス関数 $P_t(\tau)$ との間には、$P_t(\tau)=(1-B)S_t(\tau)$ なる関係が成立する。

この様なステップ関数、パルス関数を用いた場合、$\dfrac{\alpha(B)}{\lambda(B)}$ の具体的な型に応じて種々のレベル変化を表現する事が出来る。

一例として次の様なレベル変化をあげる事が出来よう。即ち、例えば、$n=0, 1, 2, \cdots$, $s=1, 2, \cdots$, $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $0<\lambda<1$ としたとき、$\dfrac{\alpha_1 B^n}{1-\lambda B^s}S_t(\tau)$ は、時点 $\tau+n$ で0から α_1 に移行し、その後 s 期毎に λ の割合で増加し、漸近的レベルが $\dfrac{\alpha_1}{1-\lambda}$ となる変化を示しており、逆に、$\dfrac{\alpha_1 B^n}{1-\lambda B^s}P_t(\tau)$ は、s 期毎に λ の割合で減少し、漸近的レベルが0となる変化を示している。さらにこれらを適当に組み合せる事により、より複雑なレベル変化を表現する事が出来る。例えば、$\alpha_1 B^n+\dfrac{\alpha_2 B^n}{1-\lambda B^s}S_t(\tau)$ は、時点 $\tau+n$ で0から $\alpha_1+\alpha_2$ に移行し、その後 s 期毎に λ の割合で増加し、漸近的レベルが $\alpha_1+\dfrac{\alpha_2}{1-\lambda}$ となる変化を示しており、逆に、$\dfrac{\alpha_1 B^n}{1-\lambda B^s}P_t(\tau)+\dfrac{\alpha_2 B^n}{1-B^s}P_t(\tau)$ は、s 期毎に λ の割合で減少し、漸近的レベルが α_2 となる変化を示している。

この様に、ステップ関数、パルス関数をダミー変数として用いた場合、$\dfrac{\alpha(B)}{\lambda(B)}$

の型を適当に変化させる事により種々の型のレベル変化を表現する事が出来る。例えば、価格変化に伴う売上高の急激な変動等は上述したダミー変数により有効に表現する事が可能であろう。なお、母数 ν の推定方法及び推定量の性質も拙稿〔3, 4〕と同様にして求める事が出来る。

§3. 商業販売額指数に関する事例研究

次に、拙稿〔5〕でも扱ったことのある、季節変動のある時系列の分析を兼ねる意味から、表1、並びに右図に示される様な昭和41年から昭和51年までの商業販売額指数（百貨店を除く小売業）に関するデータを、前述した次数 $(p, d, q)\times(P, D, Q)_s$ の乗法的モデルを利用して分析する事にしたい。

右図からも明らかになる様に、この時系列には、(i)12カ月周期の著しい季節変動があり、(ii)その変動の振幅はレベルの上昇と共に増加している。又、(iii)昭和50年、51年の周期の様相には大きな変化は見出されないが、そのレベルは予想されるよりも減少している事がわかる。これは日本経済の後退による

表(1)　商業販売額指数（百貨店を除く小売業）

(昭和45年=100)

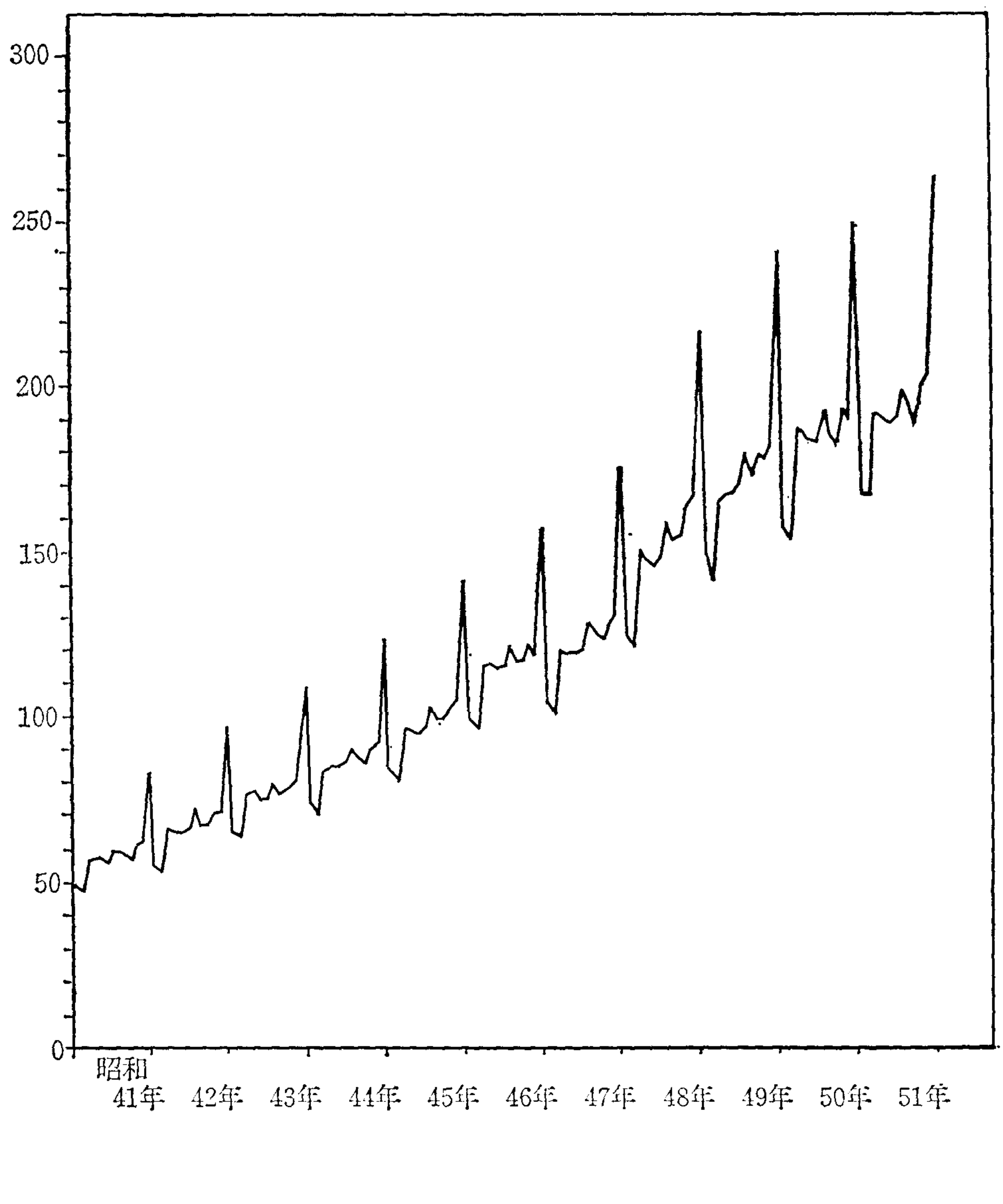
年＼月	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
昭和41年	49.1	47.6	57.3	57.5	57.3	57.2	59.8	58.5	57.6	60.6	62.0	82.5
昭和42年	55.6	54.3	66.2	65.9	64.8	66.1	70.6	67.5	67.4	70.5	71.1	97.3
昭和43年	65.3	64.4	76.4	77.8	75.0	75.7	79.0	76.3	77.1	78.9	80.2	108.7
昭和44年	72.0	69.6	83.6	84.6	84.5	85.9	90.3	87.3	85.9	90.4	92.3	123.8
昭和45年	82.7	80.6	97.3	96.6	95.6	96.7	103.0	99.7	99.4	103.1	104.8	140.4
昭和46年	98.2	96.4	114.1	116.2	115.0	115.8	121.8	117.3	117.4	121.7	119.1	156.9
昭和47年	103.7	100.8	120.0	119.1	119.4	120.3	129.1	125.8	124.0	127.7	130.6	175.1
昭和48年	124.0	121.9	150.3	147.5	145.8	148.9	158.4	153.7	154.9	162.7	167.4	216.2
昭和49年	149.9	141.5	165.0	166.6	167.3	169.7	179.8	173.4	178.7	177.8	181.9	240.0
昭和50年	157.4	154.4	187.3	186.1	183.4	183.0	193.1	186.4	180.7	192.6	190.4	248.9
昭和51年	166.8	167.1	191.5	190.7	189.5	191.2	198.2	195.4	187.5	200.3	203.4	263.3

(出所：「経済変動観測資料年報」、経済企画庁調査局、昭和52年)

影響のあらわれであろうと推測される。

さて分析は、(a)モデルの同定、(b)未知母数の推定、(c)モデルの適合度検定、(d)モデルに基づく予測の順に行なわれる。即ち、先ず最初に、(a)モデルの同定の段階に於て、コレログラムがラグの増加と共に急速に減少する様な最小の階差の次数 d, D を選択し、コレログラムの特徴と母自己相関関数の理論的性質の比較検討により、次数 (p, q, P, Q) を選択する。次に、(b)この様に試験的に構築されたモデルの母数を非線型推定法により推定し、(c)このモデルの適合度検定を行う。適合度検定は、データー数を T、残差 $\tilde{u}_t$ のラグ k の自己相関

商業販売額指数（百貨店を除く小売業）**の推移**



関数を $\gamma_k(\tilde{u})$ とするとき、適当なKに対して、$Q=(T-d-sD)\sum_{k=1}^{K}\gamma_k{}^2(\tilde{u})$ が近似的に自由度 $K-(p+q+P+Q)$ の χ^2 分布に従う事を使用する。(c)で不合格になった場合には再び(a)に戻り、モデルを再検討し、適合度検定に合格するまで(a), (b), (c)の過程を繰り返す。この様にして適合度検定に合格したモデルを基にして(d)将来の予測を行うのである。

そこで先ず始めに、昭和41年から昭和48年までのデーターを前節の乗法的モデルにより分析し、これに基づいて昭和49年の1年間を予測する事にしよう。

上述の分析過程に従って分析すれば次の様な結果を得た。即ち、先ず原データー $\{y_t\}$ を対数変換した $\{z_t=\log y_t\}$ を用いる事にし、$s=12$ とする。モデルの同定の段階で次数 $(1, 1, 0)\times(1, 1, 1)_{12}$ の乗法的モデルが適当である様に思われ、その母数を推定して、

(19) $$(1+0.16B)(1+0.51B^{12})(1-B)(1-B^{12})z_t=(1-0.62B^{12})u_t$$

なるモデルを得た。このモデルに対するQ値は、$Q=83\sum_{k=1}^{24}\gamma_k{}^2(\tilde{u})=10.9$ であり、この事から自由度21の χ^2 分布に基づく適合度検定に照らしても、このモデルを適用しても不都合のない事がわかる。参考までに、(19)式のモデルは他の如何なる3母数モデルよりもそのQ値が最小であった。最後に、(19)式のモデルに基づき、昭和49年1月から12月までの1年間にわたる商業販売額指数の最小平均2乗誤差予測値と、その信頼度数50%の予測域を求めてみれば表(2)の様になった。但し z_t の予測値を逆対数変換したものを原系列の予測値とした。表(2)からも明らかな様に、モデル(19)式は昭和49年の1年間を精度よく予測して

表(2) 予測値（昭和49年1月～12月）

月		1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
観測値		149.9	141.5	165.0	166.6	167.3	169.7	179.8	173.4	178.7	177.8	181.9	240.0
予測値		145.1	141.4	168.1	169.0	168.0	169.3	179.8	174.1	172.5	178.3	179.7	241.5
予測域 (50%)	上限	146.7	143.3	170.9	172.2	171.6	173.2	184.3	178.7	177.3	183.6	185.2	249.2
	下限	143.6	139.5	165.4	165.9	164.6	165.5	175.5	169.6	167.8	173.3	174.3	233.9

いる事がわかる。なお、伝統的な方法として、拙稿〔5〕で扱った移動平均法によっても上記したモデルとほぼ同様の精度の予測結果を得た事を付記しておきたい。

さて次に、昭和45年から、販売額指数のレベルに減少のみられる昭和50年までのデーターに乗法的モデルを適用してみよう。そのために、ここでは昭和50年以後のレベルの減少を前述したダミー変数を用いて表現する事にしたい。即ち、前述した分析結果を参考にして、昭和50年についても次数 (1, 1, 0)× $(1, 1, 1)_{12}$ の乗法的モデルを利用出来るものと想定し、昭和50年以後のレベルの減少を、τ＝昭和50年1月として、$\frac{\alpha}{1-B}S_t(\tau)$ の型のダミー変数を用いて表現する事にすれば、前述と同様の分析過程を経て、昭和45年から昭和50年までのデーターに対して、

$$y_t=-\frac{1.65}{1-B}S_t(\tau)+\frac{(1-0.57B^{12})}{(1+0.30B)(1+0.54B^{12})(1-B)(1-B^{12})}u_t \tag{20}$$

なる型のモデルを得た。

(20)式のモデルに基づき、昭和51年1月から12月までの1年間の最小平均2乗誤差予測値を求めれば表(3)の様になる。昭和51年の予測値は観測値と比較して過剰気味であり、特に7月、9月、12月の予測値に大きな隔たりが見出されるが、同じ期間に対して乗法的モデルのみを用いて予測した場合に比して一様に好ましい予測値を与えている。

表(3)　予測値（昭和51年1月～12月）

月	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
観測値	166.8	167.1	191.5	190.7	189.5	191.2	198.2	195.4	187.5	200.3	203.4	263.3
予測値	174.8	165.8	199.6	198.3	196.2	197.8	210.1	200.6	202.3	205.1	208.4	284.8

なおここでは、昭和50年以後の短期的なレベル変化を $\frac{\alpha}{1-B}S_t(\tau)$ の型のダミー変数を用いて表現したわけであるが、将来データー数が増加した場合に、この型とは別のダミー変数の使用や、この期間をもその一部として含む全体の

データーに、適当な乗法的モデルを適用する事、さらに、拙稿〔5〕で扱った移動平均法の適用の可能性等が考えられるであろう。追加的なデーターが利用可能となった段階で、これらの方法を試みてみたい。

最後に、この様な次数 $(p, d, q)\times(P, D, Q)_s$ の乗法的モデルを利用して分析を行う場合に注意しなければならない幾つかの問題点について述べてみたい。

先ず最初に、経済時系列分析にしばしば用いられる対数変換が、時として過剰変換となり、必ずしも適切な変換を与えているとは限らない場合がある事に注意しなければならない。この変換に代るものとして **Box** 及び **Cox** による方法が考えられるであろう。この方法によれば、対数変換よりも適切な変換を得る事が出来るが、対数変換に比べて直観的な解釈が難しくなる事も見逃せないであろう。

さて、モデルの同定の段階で問題となるのは、次数 (d, D), (p, q, P, Q) の決定を如何に行うかである。コレログラムの特徴と、母自己相関関数の理論的性質の比較検討により、次数 (d, D), (p, q, P, Q) を決定する過程には、ある程度の経験が必要であり、時として複数個のモデルを候補としてとりあげねばならず、分析がより複雑なものになる恐れがある。次数 (d, D), (p, q, P, Q) を決定する事は、モデル構築に関する重要な課題であるが、コレログラムを用いる方法によれば、この決定が分析者の経験に依存せざるを得ないという欠点を持っている。この様な意味から、主観的な判断を排除する所謂赤池の情報量基準に基づく次数の決定方法が、この方法に代る方法として考慮されるべきであろう。

推定及び予測の段階で共通に問題となるのは、階差方程式の初期値を如何に求めるかである。この点については、**backward forecasting** 法を用いる事が考えられる。特に、本節で扱った様な乗法的モデルに基づく季節変動のある時系列の予測にあたっては、この方法の効果が著しい事を指摘したい。

さらにレベル変化を表現するために、§2. で述べたダミー変数として、例えばステップ関数を使用した場合、$\frac{\tau}{T}$ が大きければ、$\alpha_i, \lambda_i (i=1, 2, \cdots, r)$ の推定値が不安定になる事にも注意しなければならないであろう。

乗法的モデルを利用するに際して、上述した様な注意すべき諸点があげられるのであるが、このモデルが極めて振り幅の広いモデルである事から、今後経済時系列の分析に有効に適用されるものと思われるのである。

Ⅳ　確率的３変動要素モデル

最後に、Ⅱ、Ⅲとは異なり、経済時系列分析に於て伝統的にしばしば使用される、傾向変動 (k_t)、季節変動 (s_t)、不規則変動 (u_t) から構成される３変動要素モデル（拙稿〔5〕）をとりあげ若干の考察を加える事にしたい。即ち、従来から、傾向変動、季節変動は確定変数であると仮定される場合が多いのであるが、ここでは特にこれらの変動要素に、ある確率的構造を導入する事により、従来の伝統的な経済時系列モデルを拡張した上で、直接観測不可能なこれらの変動要素の推定、並びに確率的構造を特徴づける母数の推定について考察する事にしたい。

ここでは、伝統的な経済時系列モデルとして最も良く利用される(21)式で表わされる様な加法モデルを用いる事にし、特に傾向変動 k_t、季節変動 s_t に(22), (23)式で表わされる様な確率的構造を導入しよう。

(21)　$y_t=k_t+s_t+u_t \qquad u_t \sim N.I.D.(0, \sigma^2)$

(22)　$\phi(B)k_t=v_t$

(23)　$\Phi(B^l)s_t=w_t$

$$e_t=(v_t, w_t)' \sim N.I.D.(0, V_e) \qquad t=1, 2, \cdots, T$$

ここで、$\phi(B)$, $\Phi(B^l)$ は、Ⅲ. §1. で与えられる B に関する多項式であり、前述した仮定を満たしているものとする。但し以下では解析の簡単化のために、特に、

(24)　$\phi(B)=1-\phi B \ , \qquad \Phi(B^l)=1-\Phi B^l$

なる場合を考える事にするが、以下の議論はより一般的な場合にも全く同様に成立する。

さてそこで新たに状態変数 x_t として、

(25)　$x_t=(k_t, s_t, s_{t-1}, \cdots, s_{t-l+1})'$

を導入する事により、(21), (22), (23)式のモデルの状態空間表現が可能となり、次の様な(26), (27)式で表わされるモデルに変換出来る事に注意しよう。

(26) $y_t = Cx_t + u_t$

(27) $x_t = Ax_{t-1} + Be_t$

但し、A, B, C はそれぞれ次式で示される様な行列ないしベクトルである。

$$
(28)\quad A = \begin{pmatrix} \phi, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & \Phi \\ 0, & 1, & 0, & \cdots, & 0, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & 1, & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \cdots, & 0 \end{bmatrix}' \qquad C = [1, 1, 0, \cdots, 0]
$$

又、以後の便宜のために、母数 ϕ, Φ, σ^2 及び V_e の各要素をベクトル θ で表わす事にする。

解析の必要上、この様にして得られたモデル(26), (27)式に次の仮定１，２を設定する。

仮定1. $x_0 \sim N(\bar{x}(0), V_x(0))$

仮定2. x_0, $\{u_t\}$, $\{e_t\}$ は互いに独立に分布する。

仮定１は、(27)式の初期値に必要となり、仮定２は、分析がやや複雑になるがこれを相関のある場合に拡張する事が可能である。

さて、y_t は観測可能であるが、状態変数 x_t を直接観測する事は不可能である。そこで一般に τ 期までのデーター $Y_\tau = \{y_1, y_2, \cdots, y_\tau\}$ が与えられたときに、t 期の状態変数 x_t の最小線型不偏推定量を $\hat{x}(t|\tau)$、その分散を $P(t|\tau)$ で表わす事にすれば、フィルタリング理論を用いる事により、$\hat{x}(t|t)$ を次の様な一連の再帰的関係式(29)式により推定出来る事がわかる。

$$
(29)\quad \begin{aligned}
&\hat{x}(t|t) = \hat{x}(t|t-1) + K(t)\nu(t) \qquad \hat{x}(t+1|t) = A\hat{x}(t|t) \\
&\nu(t) = y_t - C\hat{x}(t|t-1) \qquad K(t) = P(t|t-1)C'w(t|t-1)^{-1} \\
&w(t|t-1) = CP(t|t-1)C' + \sigma^2 \\
&P(t+1|t) = AP(t|t)A' + BV_eB' \qquad P(t|t) = (I - K(t)C)P(t|t-1)
\end{aligned}
$$

但し、

$$(30)\quad \hat{x}(0|0)=\bar{x}(0) \qquad P(0|0)=V_x(0)$$

である。

従って母数 θ が既知である場合には、$\hat{x}(t|t)$ を(29), (30)式を用いる事により、データーの得られる毎に逐次修正しながら推定する事が可能となるのである。

実際には母数 θ は未知であるから、これを推定しなければならないであろう。そこで、$P(Y_T|\theta)=\prod_{t=1}^{T} P(y_t|Y_{t-1},\theta)$ に注意すれば、尤度関数 $L=\log P(Y_T|\theta)$ は、

$$(31)\quad L=-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left\{\frac{\nu(t)^2}{w(t|t-1)}+\log w(t|t-1)\right\}$$

で与えられる。従って母数 θ の最尤推定量 $\hat{\theta}$ は、理論的には、(29), (30)式の制約の下に(31)式を最大にする事により求められる事がわかる。但し、この最大化問題は通常非常に複雑である。そのため、例えば一つの漸近的解法として、$K(t)$, $w(t|t-1)$ が漸近的に定数行列 K, w に収束する事を仮定する方法が考えられている。

［1978年1月30日］

（筆者は関西学院大学商学部助教授）

<参考文献>

〔1〕 Box, G. E. P. and G. C. Tiao, "Intervention Analysis with Application to Economic and Environmental Problems," JASA., 70 (1975), 70–79.

〔2〕 G. C. Chow, Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, John Wiley & Sons, Inc., 1975.

〔3〕 杉原左右一：「動的線型モデルの統計的解析」、商学論究、第21巻第3・4号、1973、75—90。

〔4〕 杉原左右一：「動的線型モデルについて」、商学論究、第22巻第1・2号、1974、105—120。

〔5〕 杉原左右一：「季節変動の推定とその調整」、商学論究、第24巻第1号、1976、43—58。